

Univerza v Ljubljani  
Fakulteta za *matematiko in fiziko*



SEMINAR 4. LETNIKA

# MODELIRANJE IZPUSTOV Z LAGRANGEVIM MODELOM

avtor: Matic Ivančič

mentor: doc. dr. Mark Žagar

27. januar 2009

# POVZETEK

V seminarju se bom ukvarjal z modeliranjem dimnih izpustov. Predstavil bom princip delovanja Lagrangevega modela, ki uporablja naključne sprehode. Lagrangejev model sledi poti delcev, ki pa je odvisna od vetra in stabilnosti ozračja. Na koncu seminarja pa bom predstavil še svoj model, ki vsebuje v seminarju opisano fiziko.

## KAZALO

1. UVOD .....	3
2. ZNAČILNOSTI ATMOSFERE.....	4
2.1. STABILNOST OZRAČJA .....	4
2.2. DIMNI DVIG .....	6
3. OPIS DELOVANJA DISPERZIJSKEGA MODELA.....	8
3.1. GAUSSOV MODEL.....	8
3.2. LAGRANGEV MODEL.....	9
3.2.1. Naključni sprehodi – "random walk" .....	9
3.2.2. Turbulentnost atmosfere.....	10
4. ANALIZA DELOVANJA LAGRANGEVEGA MODELA .....	12
5. ZAKLJUČEK.....	15

# 1. UVOD

V preteklosti so lokacije za postavitev merilnih sistemov za merjenje kakovosti zunanjega zraka določali na podlagi poškodb na rastlinah. Te poškodbe so bile ustrezen pokazatelj mest, kjer je bilo pričakovati največja onesnaženja.

Z razvojem tehnologij za čiščenje izpustov snovi v zrak so se koncentracije emisij zmanjšale do te mere, da spremembe na vegetaciji ne morejo biti več dober pokazatelj onesnaženja. Navkljub zmanjšani količini izpustov snovi v zrak pa vplivi na okolje niso zanemarljivi, zato je treba zagotavljati ustrezen nadzor kakovosti zraka.

Modeliranje izpustov iz dimnikov je torej pomemben proces. Numerični modeli omogočajo simulacijo dogajanja v ozračju in z njihovo pomočjo lahko torej ocenjujemo, kam potuje dim iz posameznih dimnikov. S tem pa se lahko določi nove oziroma preveri ustreznost starih lokacij za sistem merilnih postaj.

Eden izmed principov delovanja numeričnih modelov, ki se ukvarjajo z disperzijo snovi v zrak, je Lagrangev model z naključnimi sprehodi.

V seminarju bom predstavil delovanje preprostega Lagrangevega modela in pa nekaj fizikalnih procesov, ki jih model vsebuje. Napisal sem tudi program v Matlabu, v katerem je združeno znanje, ki se ga pridobil ob pisanju seminarja. Program ponazarja obnašanje zelo preprostega Lagrangevega modela.

## 2. ZNAČILNOSTI ATMOSFERE

Preden se lotim razlage delovanja modela, bom najprej pojasnil nekaj značilnosti atmosfere, ki so tesno povezane z nadaljevanjem seminarja.

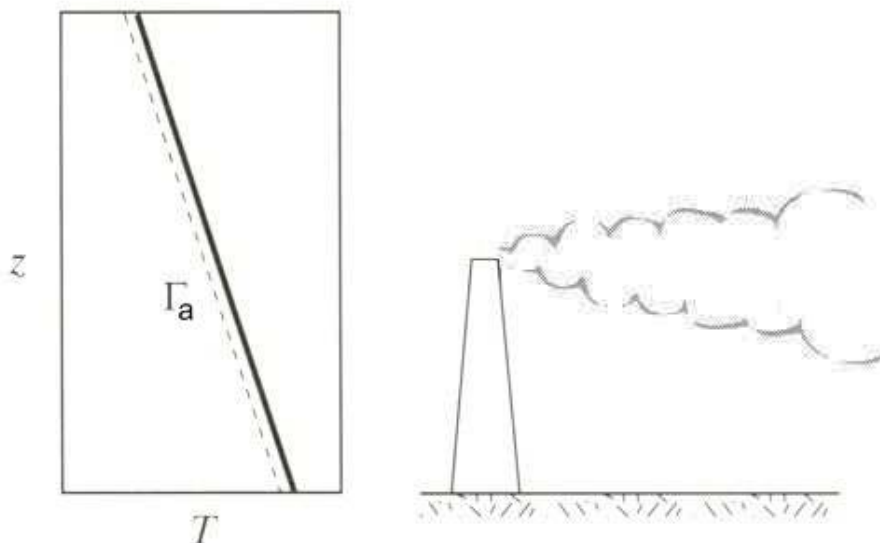
### 2.1. STABILNOST OZRAČJA

Stabilnost ozračja je zelo pomemben parameter, saj nam le ta pove, kako hitro se bo dvigal dim iz izpusta in kako hitro se bo premešal v okolico. Stabilnost atmosfere določamo na podlagi vertikalnega gradienta temperature. V standardni (nevtralni) atmosferi se temperatura z višino spreminja po suhi adiabatni ( $\Gamma_a$ ):

$$\frac{\partial T}{\partial z} = -\Gamma_a = -10^\circ\text{C} / \text{km}$$

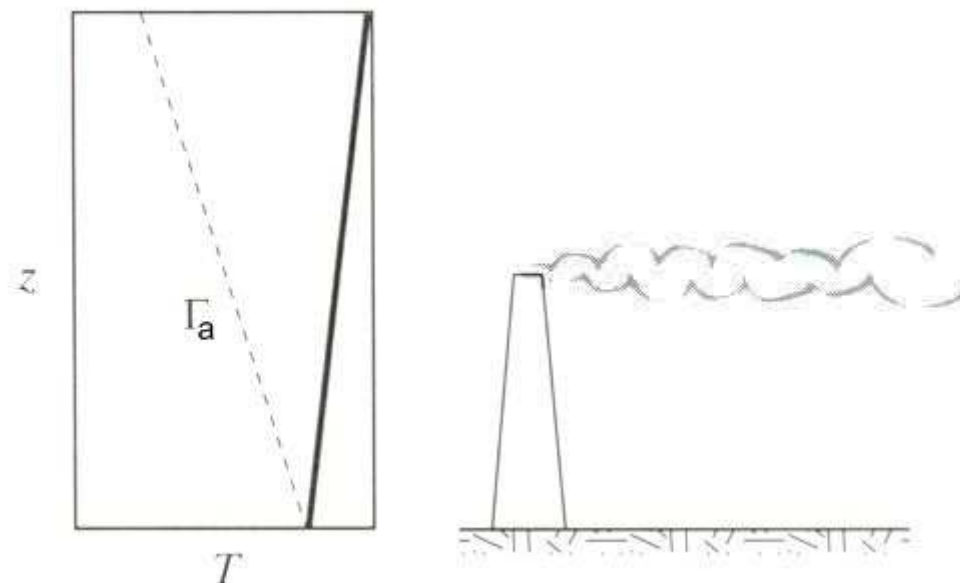
Temperatura v nenasičenem zraku se med dviganjem vedno spreminja po premici, ki jo opisuje suha adiabata, pa naj gre za prisiljeno dviganje ali pa za konvektivno dviganje.

Z nevtralno atmosfero (Slika 1) imamo opravka, ko je vertikalni gradient temperature enak suho adiabatnemu. Dim iz izpusta se v tem primeru enakomerno razpršuje tako v horizontalni kot v vertikalni smeri.



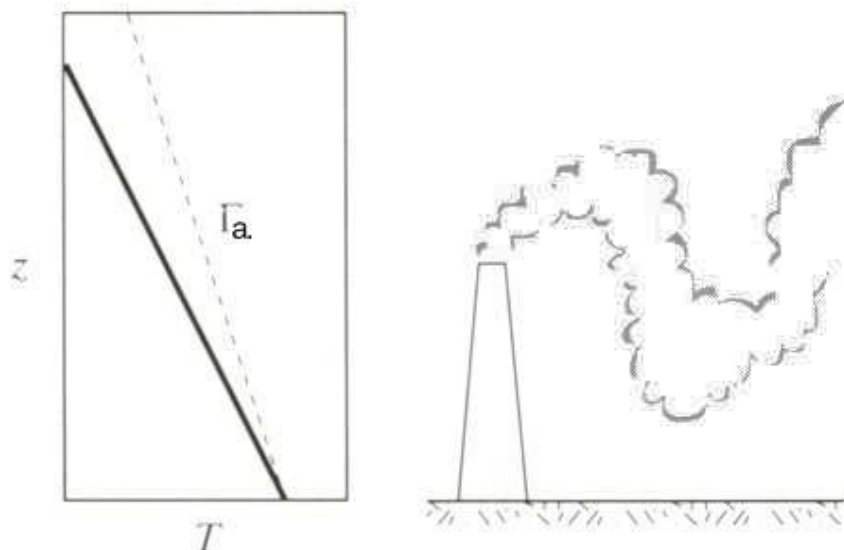
Slika 1: Za nevtralno atmosfero je značilen enak vertikalni gradient temperature kot pri suhi adiabatni (vir[4]).

V primeru, ko je vertikalni gradient temperature zraka manjši (bolj strm) od  $\Gamma_a$ , govorimo o stabilnem ozračju (Slika 2). Takrat se dvigajoči zrak ohlaja hitreje od okolice in je zato gostejši od lete. Ker pa je gostejši, je tudi težji in ga zato okolica potiska nazaj v začetno stanje in v mirovanje. Zato je za stabilno ozračje značilno počasno mešanje, saj okolica zrak vrača v ravnovesno lego. Zelo stabilno ozračje se pojavlja predvsem v zimskih mesecih ob temperaturnih inverzijah, ko je plast ozračja višje nad nami toplejša od zraka pri tleh, torej ko imamo pozitiven vertikalni gradient temperature. Takrat velja, da toplota teče k tlam.



Slika 2: Slika predstavlja stabilno ozračje, ko je vertikalni gradient temperature bolj strm od nevtralne atmosfere (vir [4] ).

V obratnem primeru, ko je plast ozračja nad nami nestabilna (Slika 3), pa je vertikalni gradient temperature izrazito negativen in manjši od  $\Gamma_a$ . Dvigajoči zrak se v tem primeru hitreje segreva od okolice in je zato redkejši od le-te, s tem pa tudi lažji in zato za njegovo dviganje ni nobenih ovir. Velike nestabilnosti dosežemo poleti ob močnem sončnem sevanju, kjer je pregreto tal velika in je zaradi tega temperatura zraka pri tleh višja. V nestabilnem ozračju dobimo tako izrazita vertikalna gibanja, ki nam hitro premešajo spodnjo plast in zato dobimo hitro disperzijo. V nestabilni atmosferi je tudi turbulenca močnejša in zato prihaja do valovitega gibanja dima.



Slika 3: Nestabilna atmosfera. Gradient temperature je večji od nevtralne atmosfere (vir [4] ).

Stabilnost lahko prikazujemo z različnimi razredi stabilnosti. Najbolj pogosto uporabljena klasifikacija so Pasquill - Turnerjevi razredi stabilnosti, uporabljajo pa se še Klug-Manierjevi razredi stabilnosti. Razred stabilnosti določimo na podlagi podatka o vertikalnem gradientu

temperature. Povezavo med vertikalnim gradientom temperature in stabilnostnimi razredi prikazuje Tabela 1.

**Tabela 1: Tabela prikazuje povezavo med različnimi razredi stabilnosti atmosfere.**

$\nabla T$ [K/km]	Klug-Manier-jevi razredi	Pasquill/Turner-jevi razredi	stabilnost
$(-\infty, -19]$	V 6	A / 1	zelo nestabilno
$(-19, -17]$	IV 5	B / 2	nestabilno
$(-17, -15]$	III/2 4	C / 3	rahlo nestabilno
$(-15, -5]$	III/1 3	D / 4	nevtralno
$(-5, 15]$	II 2	E / 5	rahlo stabilno
$(15, \infty)$	I 1	F / 6	stabilno

Torej potrebujemo podatek o vertikalnem gradientu temperature, ki ga dobimo iz meritev temperature na različnih višinah nad točko, npr. z meteorološkim balonom. Ko takih meritev nimamo, pa ga lahko približno izračunamo tudi iz temperaturnih podatkov dveh postaj, ki sta postavljeni na različnih nadmorskih višinah (npr. prva na dnu doline, druga pa na vrhu hriba nad dolino). Gradient izračunamo po naslednji enačbi:

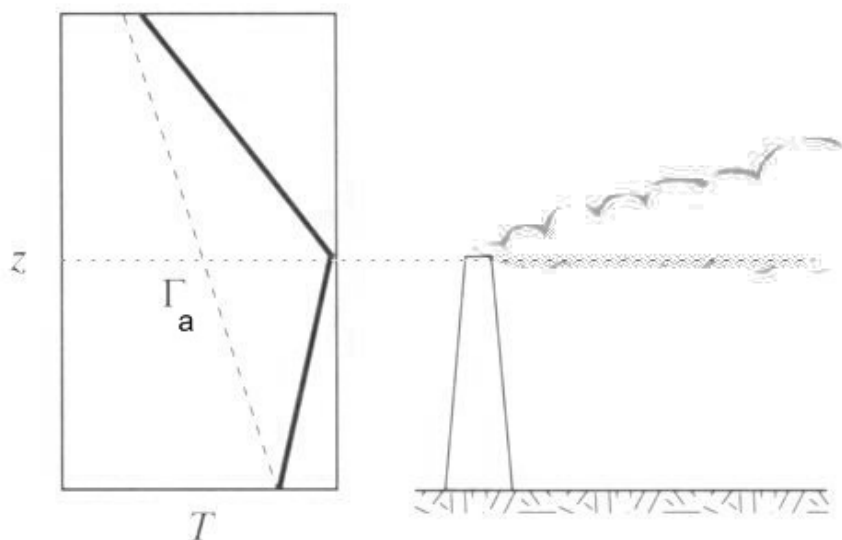
$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{T_z - T_s}{h}$$

kjer  $T_z$  predstavlja temperaturo na zgornji postaji,  $T_s$  temperaturo na spodnji postaji,  $h$  pa višinsko razliko med postajama. Pri tem se moramo zavedati, da je lahko temperatura pod močnim vplivom lokalnih dejavnikov in torej ni reprezentativna za navpični stolpec zraka.

## 2.2. DIMNI DVIG

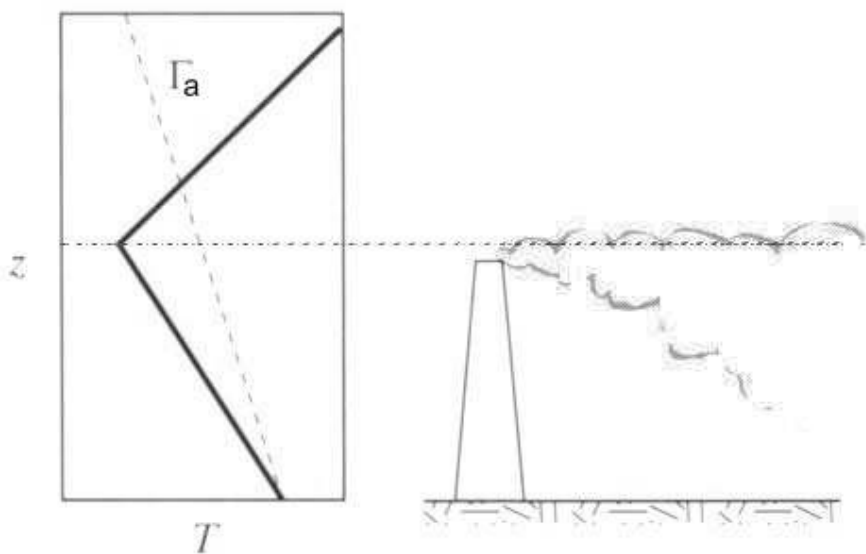
Dimni dvig je višina, do katere se vzdignejo izpusti iz odvodnika. Na dimni dvig vplivajo temperatura izpustov, njihova hitrost in pa volumski pretok izpustov. Izpusti se dvigajo, ker je njihova temperatura višja od okolice, torej so redkejši in lažji od okolice.

Pri obravnavanju dimnih plinov pa je še pomembno, do katere višine sega inverzna plast. Dimni dvig torej lahko preseže višino inverzije in se zato neomejeno razpršuje v višje plasti (Slika 4). Ravno zaradi tega pojava se postavlja visoke dimnike, ki lahko pošiljajo izpuste nad inverzno plast in tako manj obremenjujejo bližnje okolje.



**Slika 4: Inverzna plast se nahaja pod vrhom dimnega plina. Dim se zato širi predvsem navzgor, v spodnjo plast pa se ne meša (vir [4] ).**

V drugem primeru, ko dimni dvig ne preseže inverzne plasti, pa se koncentracije kopičijo pod inverzno plastjo (Slika 5). To so pogoji, ki so za okolje najbolj obremenilni. Širjenje dima navzgor je v tem primeru omejeno z inverzno višino. Tam se izpusti odbijajo nazaj v spodnje plasti.



**Slika 5: Primer izpusta, ko dimni dvig ne preseže inverzne plasti. Zato se koncentracije kopičijo znotraj inverzne plasti (vir [4] ).**

### 3. OPIS DELOVANJA DISPERZIJSKEGA MODELA

Širjenje snovi v ozračju oziroma disperzija je kompleksen proces, ki ga modeliramo na različne načine. Disperzija je definirana kot razširjanje snovi oziroma primesi v ozračju.

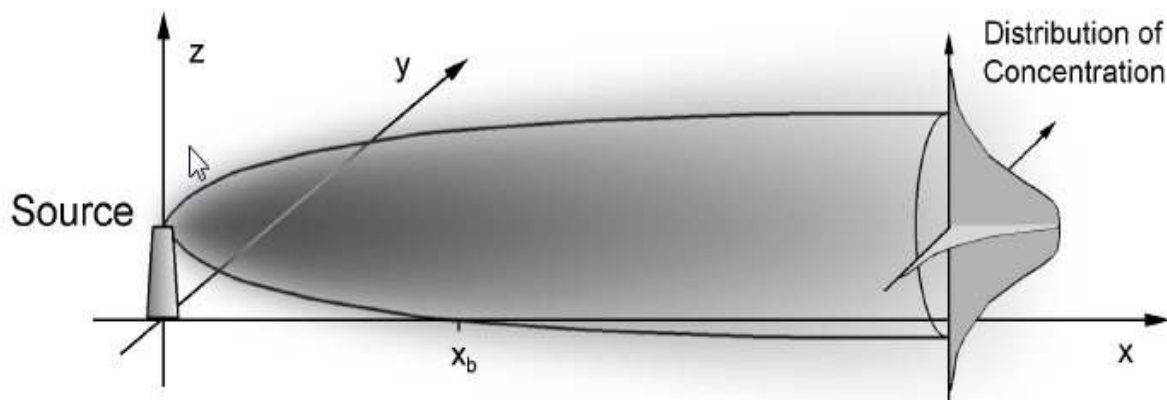
Disperzijo delimo na dva mehanizma. Prvi mehanizem je transport snovi v ozračje. Snov transportirajo premikajoče se zračne mase, torej veter. Drugi mehanizem pa je difuzija, ki povzroča, da se primesi v ozračju razširjajo tudi prečno na smer vetra in se tako redčijo. Difuzija je lahko na ravni molekul, ko primesi prehajajo iz mesta z višjo koncentracijo na mesto z nižjo koncentracijo. Omenjeno dogajanje je v ozračju praktično zanemarljivo v primerjavi z drugo obliko, tako imenovano turbulentno difuzijo. Poglavitni mehanizem za turbulentno difuzijo so vrtinci oziroma turbulenca v ozračju. Vrtinci poskrbijo, da se dim močno razredči. Če se ne bi, bi pri tleh lahko namerili take koncentracije škodljivih snovi kot v dimniku.

Emisijski parametri kot so količina, koncentracija, temperature dimnih plinov, oblika dimnika in meteorološke razmere, predvsem veter, stabilnost atmosfere in temperatura zraka določajo, koliko se bodo škodljivi plini razredčili in kam se bodo razširili. Pri enakih pogojih emisije je torej predvsem od vremenskih razmer odvisno, kako visoke bodo koncentracije pri tleh. Razgiban relief lahko močnejše vpliva na temperaturno in vetrovno polje in zato tudi na koncentracije škodljivih plinov.

Pri opisu difuzije ločimo dve vrsti modelov: Gaussov in Lagrangev model.

#### 3.1. GAUSSOV MODEL

Med najpreprostejšimi modeli za modeliranje ozračja je analitični Gaussov model. Model upošteva transport plinov v smeri vetra (npr. smer  $x$ ) in razredčevanje dima v smereh, ki sta pravokotni na smer vetra (smer  $y$  in  $z$ ). Dinamika razredčevanja plina v smeri  $y$  in  $z$  je porazdeljena normalno (Gaussovsko) s standardnima deviacijama  $\sigma_y$  in  $\sigma_z$ . Vrednosti obeh deviacij sta določeni glede na stabilnost atmosfere in razdalje od točke onesnaženja. Razširjanje dima v Gaussovem modelu prikazuje Slika 6.

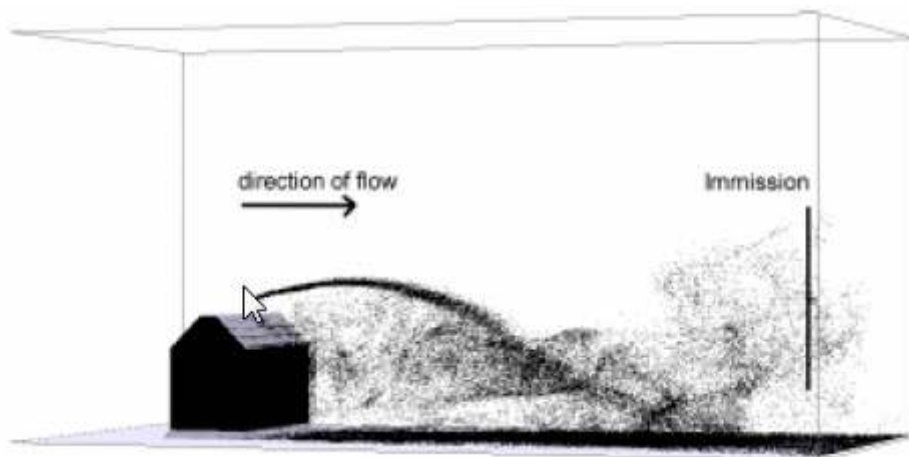


Slika 6: Gaussovo razširjanje dima (vir [6]).



## 3.2. LAGRANGEV MODEL

Pri Lagrangevem modelu se modelira gibanje delcev v smeri vetra. Pot oziroma trajektorija delcev se določa po principu naključnih sprehodov. Za vsak dogodek model v ozračje izpusti veliko število delcev (100 000) in nato spremlja, kam ti delci potujejo (Slika 7).



Slika 7: Lagrangevo razširjanje delcev dima (vir [6]).

Prednost Lagrangevega modela pred Gausovim je ta, da lahko opisuje dogajanja v kompleksnem terenu. Gibanje delcev v Lagrangevem modelu se lahko premika preko ovir in se jim umika (delci lahko potujejo okoli hriba oz. stavb, Gaussov model pa hriba ne vidi).

To je seveda odvisno od vetrovnega polja nad reliefom, kjer obravnavamo difuzijo. Pri izdelavi vetrovnega polja ponavadi uporabimo meteorološki model, nato pa v njega vpneemo še Lagrangev model. Pri seminarju sem privzel, da obravnavam primer nad enostavnim, ravnim reliefom, kjer je nad celotnim območjem vetrovno polje homogeno, torej ni odvisno od kraja.

### 3.2.1. Naključni sprehodi – "random walk"

Osnovni princip delovanja Lagrangevega modela je simulacija naključnih sprehodov ("random walk") - Slika 8. To pomeni, da so poti (trajektorije) delcev sestavljene iz različno dolgih in različno usmerjenih korakov (vsak sprehod vsebuje nekaj tisoč korakov). Korake modeliramo tako, da sproti spreminjamo vse tri koordinate delca po naslednjih enačbah:

$$x^{t+1} = x^t + u_x(t)\Delta t + \Delta x^t$$

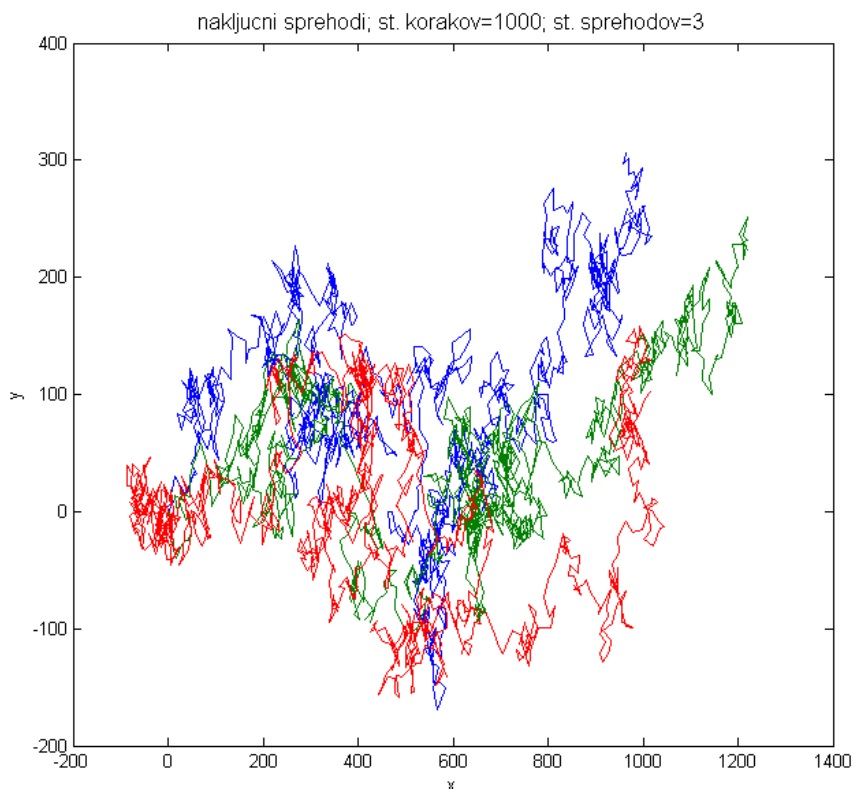
$$y^{t+1} = y^t + u_y(t)\Delta t + \Delta y^t$$

$$z^{t+1} = z^t + u_z(t)\Delta t + \Delta z^t$$

kjer  $x_i^{t+1}$  predstavlja  $i$ -to komponento naslednjega koraka od  $x_i^t$ ,  $u_i$  komponento vetra v  $i$ -ti smeri (sprehod posameznega delca ni popolnoma naključen, saj upošteva veter in se usmerja vzdolž vetra),  $\Delta t$  je časovni razpon med dvema korakoma, zadnji člen pa vsebuje naključni ("random") generator:

$$\Delta x_i^t = [Delx\_R]_{-i}^t$$

Generator naključnih števil izbira poljubno število iz intervala  $[-l, l]$ , vrednost velikosti  $l$  pa določimo s pomočjo podatka o stabilnosti ozračja.



**Slika 8: Primer naključnega sprehoda treh delcev. Vsak izmed delcev je naredil 1000 vmesnih korakov.**

Za delovanje Lagrangevega modela zato potrebujemo izdelano vetrovno polje, saj model za vsak nov korak določenega delca potrebuje podatek o smeri in velikosti vetra v točki, kjer se delec trenutno nahaja.

Zdaj imamo opisano dinamiko posameznega delca. Nato pa opazujemo, kje ti delci trčijo ob podlago (relief) in statistično obravnavamo končne točke vseh delcev znotraj enega dogodka. Dobimo torej povprečne urne vrednosti koncentracij na tleh, iz njih pa lahko izračunamo povprečne dnevne in povprečne letne koncentracije.

Na podlagi tega dobimo informacijo o porazdelitvi onesnaženja, ki doseže tla.

Velikost naključnega člena pa ni enaka za vse pogoje v ozračju, ampak je odvisna od turbulentnosti atmosfere.

### 3.2.2. *Turbulentnost atmosfere*

Turbulentnost atmosfere je odvisna od statične stabilnosti in hitrosti vetra. Pove nam, kako hitro delci difundirajo in se premešajo v plasti. Turbulentnost atmosfere vpeljemo v člen, ki vsebuje naključni prispevek, oziroma v interval območja, s katerega naključni generator izbira števila.

Velikost intervala, s katerega naključni generator izbira števila, je podana z  $[-l_i, l_i]$ , kjer je  $l$  definiran kot:

$$l_i = \sqrt{6K_i \Delta t}$$

Koeficient  $K_i$  nam tu predstavlja koeficient, ki vsebuje podatek o stabilnosti atmosfere. Hkrati je  $K_i$  parametrizacija turbulentnih procesov. Horizontalna koeficienta  $K_x$  in  $K_y$  imata v večini primerov enake vrednosti, različen je koeficient v vertikalni smeri  $K_z$ .

Koeficiente  $K_i$  lahko računamo s pomočjo podobnostne teorije, so pa tudi povezani s parametri disperzije v Gaussovem modelu:

$$K_i = \frac{\sigma_i^2}{2t}$$

Koeficiente  $\sigma_i$  pa potem določimo, glede na to, kje se delec nahaja in kakšna je tam stabilnost atmosfere. Veljajo različne enačbe za določitev horizontalnih in vertikalnih koeficientov, določimo jih pa lahko empirično s pomočjo spodnje enačbe:

$$\sigma_x = \sigma_y = ax^{0,894},$$

$$\sigma_z = cx^d + f$$

kjer  $x$  predstavlja trenutno oddaljenost delca od dimnika, faktorje  $a$ ,  $c$ ,  $d$  in  $f$  pa dobimo iz spodnje tabele (Tabela 2).

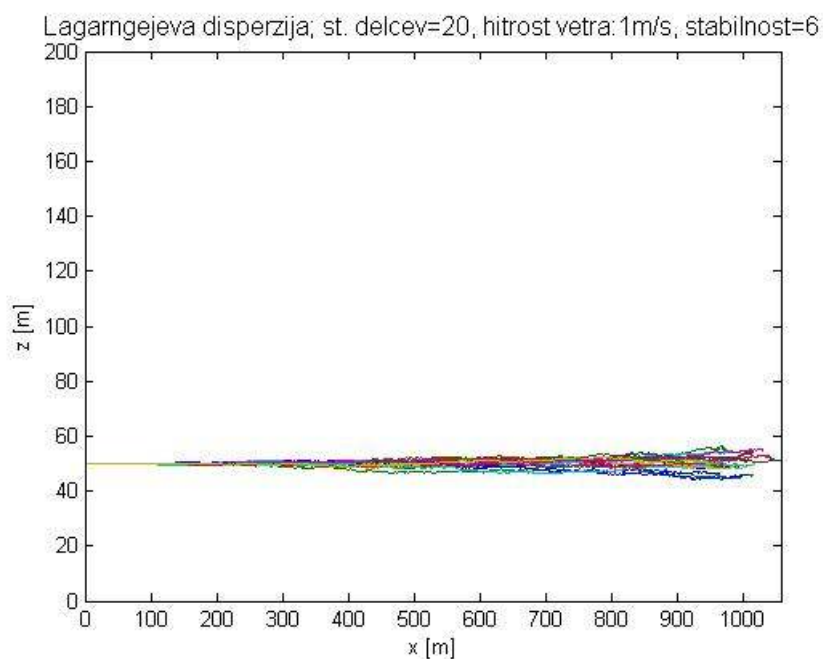
**Tabela 2:** Tabela, ki prikazuje vrednosti koeficientov, ki jih uporabljamo pri računanju vrednosti  $\sigma_i$ . Povezava je narejena na podlagi Pasquillovih razredov (vir: [4]).

Stability	$x \leq 1$ km				$x \geq 1$ km		
	$a$	$c$	$d$	$f$	$c$	$d$	$f$
A	213	440.8	1.941	9.27	459.7	2.094	-9.6
B	156	106.6	1.149	3.3	108.2	1.098	2.0
C	104	61.0	0.911	0	61.0	0.911	0
D	68	33.2	0.725	-1.7	44.5	0.516	-13.0
E	50.5	22.8	0.678	-1.3	55.4	0.305	-34.0
F	34	14.35	0.740	-0.35	62.6	0.180	-48.6

## 4. ANALIZA DELOVANJA LAGRANGEVEGA MODELA

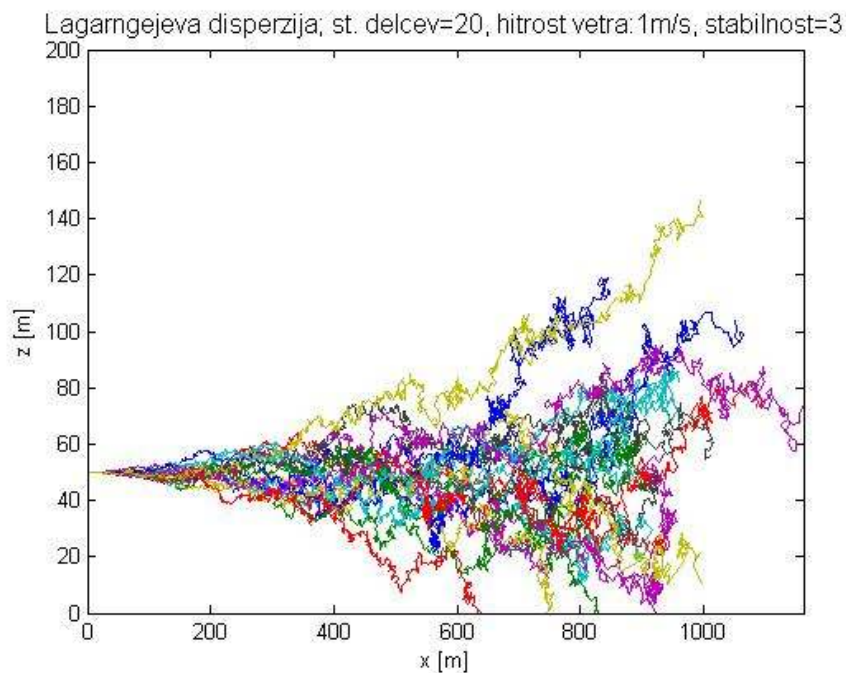
Napisal sem program v Matlabu, ki ponazarja delovanje Lagrangevega modela. Za prikaz rezultatov sem v vseh primerih uporabil enak veter, spreminjal pa sem razrede stabilnosti. Program pošlje 20 delcev, ki potujejo toliko časa, dokler ne naredijo 1000 korakov. Upošteval sem, da se delci s 30% verjetnostjo ustavijo, ko dosežejo tla, s 70% verjetnostjo pa delci po trku s tlemi nadaljujejo svojo pot. V vseh primerih je višina dimnika enaka  $H=50\text{m}$ , program pa ne upošteva dimnega dviga.

Slika 9 prikazuje sled delcev, ki so bili izpuščeni v primeru stabilne atmosfere. Difuzija delcev je počasna in zato skoraj vsi potujejo v smeri vetra in se ne odklanjajo dosti od nje. Spodnja plast ozračja se v tem primeru zelo počasi premeša, delci pa dolgo vztrajajo v njej. V tem primeru simulacije nobeden od delcev ni dosegel tal.



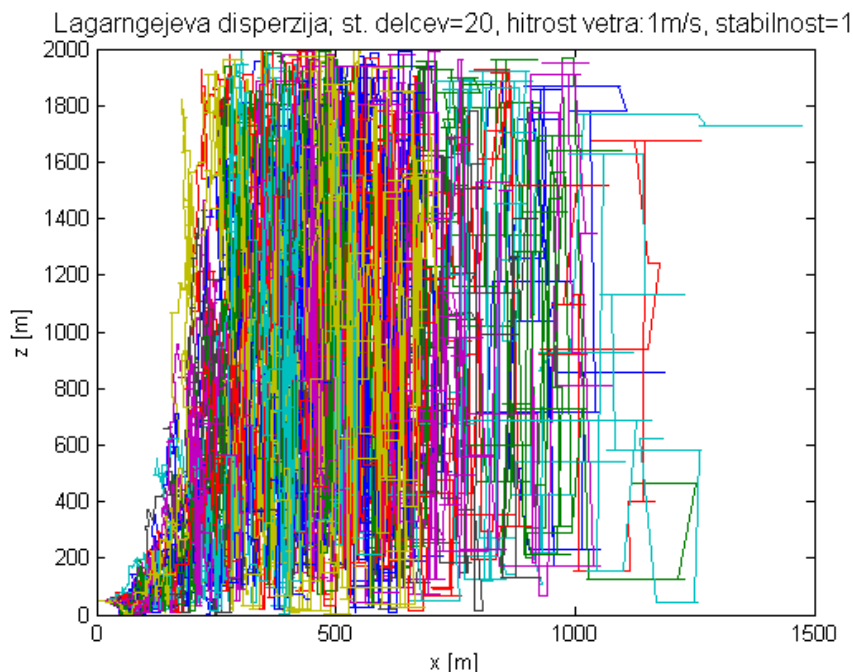
**Slika 9: Gibanje delcev v stabilnem ozračju . Difuzija delcev je počasna, delci pa dolgo vztrajajo v primarni smeri.**

Naslednja slika (Slika 10) prikazuje gibanje delcev v primeru, ko imamo opravka z nevtralno atmosfero. V tem primeru je difuzija delcev že opaznejša, delci se hitreje razpršujejo in nekateri tudi dosežajo tla.



**Slika 10: Gibanje delcev v nevtralni atmosferi. Opazna je močnejša disperzija.**

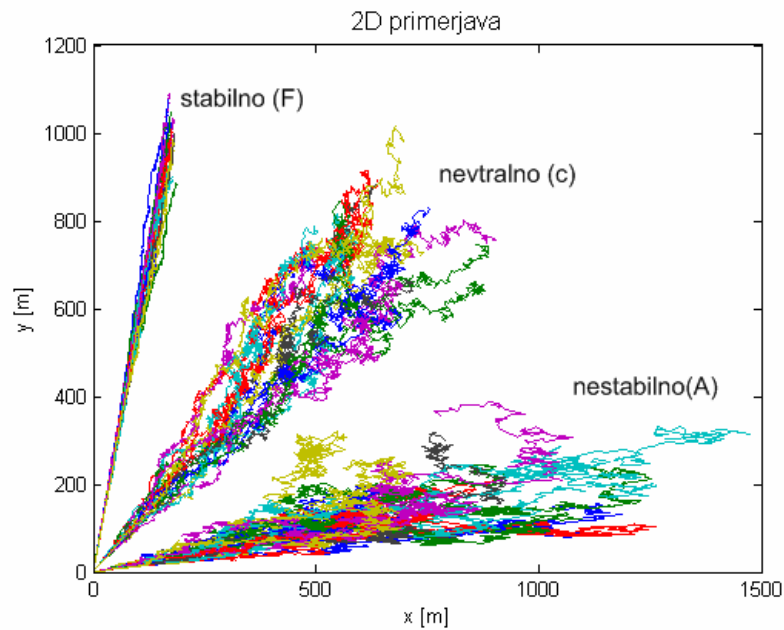
V zadnjem primeru (Slika 11) sem obravnaval gibanje delcev v nestabilni atmosferi. Takšno ozračje je zelo turbulentno in zato prihaja do hitrih premešanj spodnje plasti ozračja (PBL). Višino mejne plasti PBL sem nastavil na 2 km. Delci se hitro razpršijo, delajo dolge korake in zato jih tudi dosti doseže tla v zelo majhni razdalji stran od dimnika.



**Slika 11: Nestabilna in zelo turbulentna atmosfera. Difuzija delcev je hitra, veliko delcev tudi zelo kmalu doseže tla.**

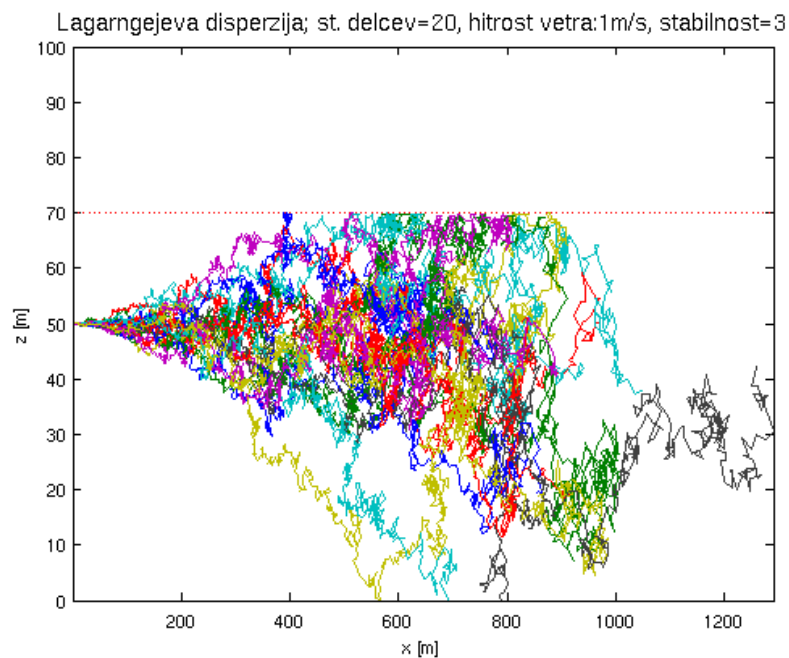
Pripravil pa sem še pogled na 2D ravnino xy (Slika 12) in vanjo postavil vse zgornje tri primere gibanja delcev, le da sem vsak primer (komplet delcev) poslal v drugo smer pri isti velikosti hitrosti vetra. V primeru stabilnega ozračja delci potujejo skupaj v snopu in se zelo

malo razširjajo prečno na smer vetra. V nestabilni atmosferi pa se delci hitro premešajo in se tudi opazno razširjajo v prečni smeri.



**Slika 12: Primerjava poti delcev v treh različnih stanjih atmosfere.**

Na koncu sem še naredil razmislek, kako bi modeliral dogajanje pod inverzno plastjo. Najpreprostejši način je, da delec, ki doseže inverzno plast, enostavno zrcalno odbijemo od nje. Naprej pa potem delec spet potuje po istih zakon kot so veljali do odboja. Za višino inverzije sem privzel 70 m ter si ogledal primer v nevtralnem ozračju. Rezultat je predstavljen na Slika 13.



**Slika 13: Modeliranje pod inverzno plastjo.**

## 5. ZAKLJUČEK

V seminarju sem predstavil princip delovanja Lagrangevega modela nad enostavnim terenom, kjer imamo opravka z homogenim vetrovnim poljem. Nad kompleksnim terenom ostane princip Lagrangevega modela isti: delci še vedno potujejo skupaj z vetrom in se razširjajo v odvisnosti od stabilnosti atmosfere. Razlika pa je v tem, da v kompleksnem terenu potrebujemo 3D vetrovno polje. Le tega pa računamo ločeno s kakšnim vetrovnim modelom za manjše skale.

Opozoril bi še, da v seminarju nikjer nisem omenjal kopičenja delcev v atmosferi. Ta proces pa je najbolj opazen v času, ko imamo opravka z inverzijo. Takrat bi morali spremljati zgodovino delcev, ki ostanejo v ozračju in upoštevati njihovo kopičenje. Ta proces je težak za modeliranje, je pa tudi najbolj obremenilen za okolje. Zato bi dober disperzivni model moral vsebovati tudi ta proces.

## LITERATURA

1. Rakovec in Vrhovec, OSNOVE METEOROLOGIJE ZA TEHNIKE IN NARAVOSLOVCE
2. [http://ams.allenpress.com/perlserv/?request=get-document&doi=10.1175%2F1520-0450\(1997\)036%3C1138:MWFAPT%3E2.0.CO%3B2&ct=1](http://ams.allenpress.com/perlserv/?request=get-document&doi=10.1175%2F1520-0450(1997)036%3C1138:MWFAPT%3E2.0.CO%3B2&ct=1)
3. [https://narc.llnl.gov/uploads/Nasstrom\\_ARealTime\\_135120\\_dntrx.pdf](https://narc.llnl.gov/uploads/Nasstrom_ARealTime_135120_dntrx.pdf)
4. Gilbert M. Masters, INTRODUCTION TO ENVIRONMENTAL ENGINEERING AND SCIENCE
5. Roger A. Pielke, MESOSCALE METEOROLOGICAL MODELING
6. <http://aqm.jrc.ec.europa.eu/harmo7/P212.pdf>